Wykład 1. 3.10.2003

INTERPOLACJA.

Głównym zadaniem interpolacji jest wyznaczenie możliwie szybki sposób wartości funkcji f(x) dla zmiennej niezależnej *x*, która nie należy do tablicy danych (x_i,y_i). Dzięki temu, krótki podprogram obliczeniowy, dla niedużego zestawu danych pozwala zastąpić obszerne, długie kolumny tablicy wartości funkcji..

Zadanie interpolacji możemy w sposób ogólny sformułować następująco:
Niech w ograniczonym przedziale [a,b] będzie zadany ciąg punktów

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_n = b,$$

któremu odpowiada ciąg wartości funkcji y_0, y_1,... y_i,...y_n , { y_i=f(x_i) }. Ponadto niech będzie zadany zbiór funkcji liniowo-niezależnych φ_i {i=1,2,...n} określonych na [a,b].
Zadanie interpolacji:
wyznaczyć współczynniki a_0, a_1, ...a_n takie, że

$$a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + a_2 \varphi_2(x_i) + \cdots + a_n \varphi_n(x_i) = y_i \qquad \textbf{(1)}$$

dla i=0,1,........n.
Powstaje układ równań algebraicznych, dla wyznaczenia współczynników a_i. Po wyznaczeniu a_i mamy funkcję interpolacyjną, która "zastępuje" (mówimy aproksymuje) funkcję *f* (x) na przedziale [a,b] i w wybranych punktach przedziału, które nazywamy ***węzłami interpolacji***, pokrywa się z wartościami funkcji:

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Reprezentacja w postaci wzoru (2) nazywa się wielomianem uogólnionym)
Jeżeli za $\varphi_i(x)$ weźmiemy zbiór jednomianów $\{1,x,x^2,.....x^n\}$ to otrzymamy interpolację wielomianową.

$$f(x) \sim p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \textbf{(3)}$$

Warunek interpolacyjny $p(x_i)=y_i$ dla $0 \le i \le n$ prowadzi do linowego układu n+1 równań dla współczynników a_0, a_1, a_2.......a_n. Układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Przykład: Wyznaczyć wielomian interpolacyjny *p(x)*, pokrywający się z funkcją $f(x)=3^x$ ($-1 \le x \le 1$) w punktach $x_0=-1$, $x_1=0$ oraz $x_2=1$

Rozwiązanie: przyjmujemy, że $p(x)=a_0=a_1x+a_2x^2$. Współczynniki a_0, a_1 i a_2 obliczamy z układu:

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &= \frac{1}{3} \\ a_0 &= 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 3 \end{aligned}$$

Stąd obliczamy $a_0=1$, $a_1=4/3$, $a_2=2/3$. Tak więc funkcja $f(x)=3^x \sim 1+4/3x+2/3\,x^2$

Przykład ten przy pomocy Matlaba można byłoby wykonać następująco:

```
%interpolacja funkcji 3^x metoda wielomianu bezposredniego w punktach  -1,
0, 1
close all;
x=[-1 0 1];y=3.^x;
%A=[1-1 1;1 0 0;1 1 1]; ponieważ macierz jest niewielka łatwo ja utworzyć
%"recznie" ale przy większej liczbie punktów
%interpolacji może to być kłopotliwe. W MATLABie istnieje funkcja, która
ułatwia tworzenie macierz Vandermonde'a
%A=[ones(size(x));  x;  x.^2]' - jeżeli wybierzemy tą wersje tworzenia A to
należy pamiętać o odwróceniu kolejności wyrazów (pierwszy ostatnim) w
%wektorze c %c1=flipud(c);
%zamiana wierszy pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd., konieczne
aby można było zastosować
%funkcje polyval - która oblicza wartość wielomianu dla zadanych
współczynników i zmiennej t


A=vander([ -1 0 1])% funkcja vander tworzy macierz Vandermonde'a - zadajemy
tylko wartosci x
c=A\y'%rozwiązanie układu równań Ac=y , macierz A jest macierzą
Vandermonde'a
%c1=[0.66666667,1.333333,1.00]
t=-1:0.02:1;% zmienna pomocnicza do wykreślenia funkcji
%obliczenie wartości wielomianu
yi=polyval(c',t);
yd=3.^t;
er=yi-yd;
error1=max(abs(er));
imax=find(max(abs(er))==abs(er));
figure(1)
wiel=plot(t,yi,'r');%wykres
% kreslenie wezlow interpolacji przez funkcje text
text(-1,3.^(-1),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
'VerticalAlignment','middle','FontSize',16)%postawienie duzej kropki
text(0,3.^(0),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
```

```
   'VerticalAlignment','middle','FontSize',16);
text(1,3.^(1),'\bullet','HorizontalAlignment','center','FontSize',16);
%narysowanie maksimum i opisanie
text(t(imax),er(imax)+0.1,['Blad maksymalny =',num2str(abs(er(imax)))],...
   'HorizontalAlignment','right',...
'VerticalAlignment','middle','FontSize',10)
text(t(imax),er(imax),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
'VerticalAlignment','middle','FontSize',12)
hold on
dokl=plot(t,yd,'g');
error=plot(t,er,'b');
hold off
legend_handles=[wiel;dokl;error];
legend(legend_handles,'wiel. interpol','warotsc dokl.','blad')
 grid
 xlabel('t','FontSize',16)
 ylabel('3^x , wielomian interpol., blad', 'FontSize',16)
 legend_handles;
 title('INTERPOLACJA WIELOMAINOWA FUNKCJI 3^X, 3 węzly','FontSize',11)
 %
 %interpolacja dla czterch wezlow (-1,-0.5,0.0,0.5,1)
 %sprawdzic rachunkiem jak powyzej, ze te same wyniki orzymamy jezeli do
obliczen urzyjemy funkcji
 %polyfit rzadajac aby stopien wielomiany byl  rowny n-1, gdzie n jest
iloscia wezlow.
 x1=-1:0.5:1;%zadajemy teraz piec wezlow: -1, -0.5, 0, 0.5, 1
 y1=3.^x1;
 pa=polyfit(x1,y1,4);% wyznacza wielominan w normie sriedniokwadratowej gdy
m >n - m ilosc danych
 % 4 oznacza wielomian czwrtego rzedu poniewaz liczba wezlow jest 5
otrzymujemy wielomian interpolacyjny.
 y3=polyval(pa,t);% wylicza wartosc wielomiannu dla zmiennej t i
wspolczynnikow pa wyznaczonych przez
 %polyfit
 er3=y3-yd;
 %
 figure(2)! Rysujemy drugi wykres (drugie okno z wykresem)
  plot(t,y3,'r',t,yd,'.',t,er3,'g')
  axis([-1 1 -0.5 3])
  % ozdabianie wykresu
  text(-1,3.^(-1),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
'VerticalAlignment','middle','FontSize',16)%postawienie duzej kropki
text(-0.5,3.^(-0.5),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
   'VerticalAlignment','middle','FontSize',16)
text(0,3.^(0),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
   'VerticalAlignment','middle','FontSize',16)%postawienie duzej kropki
text(0.5,3.^(0.5),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
'VerticalAlignment','middle','FontSize',16)%postawienie duzej kropki
text(1,3.^(1),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
   'VerticalAlignment','middle','FontSize',16)%postawienie duzej kropki
 title('INTERPOLACJA WIELOMAINOWA FUNKCJI 3^X, 5 węzlow','FontSize',11);
%
imax=find(max(abs(er3))==abs(er3));% wyznaczanie indeksu dla zmiennej t
przy ktorym wystepuje maksimum
%narysowanie maksimum i opisanie
text(t(imax),er3(imax)+0.1,['Blad maksymalny
=',num2str(abs(er3(imax)))],...
   'HorizontalAlignment','right',...
'VerticalAlignment','middle','FontSize',10)
text(t(imax),er3(imax),'\bullet','HorizontalAlignment','center',...
   'VerticalAlignment','middle','FontSize',12)
%legend_handles=[wiel;dokl;error];
legend('wiel. interpol','warotsc dokl.','blad')
grid on
```

Macierz współczynników równania (4) nazywa się macierzą Vandermonde'a. Wyznacznik ten jest zawsze różny od zera, jeżeli węzły interpolacji $x_0, x_1, \ldots.x_n$ są różne. Stąd wynika,że wartości współczynników a_{-i}. Są wyznaczone jednoznacznie. Jednak macierz Vandermonde'a jest *"źle uwarunkowana"* i mogą się pojawić kłopoty z dokładnym rozwiązaniem układu równań algebraicznych (4). Ponadto nakład pracy obliczeniowej dla uzyskania wielomianu (3) jest znacząco duży. Dlatego szukanie wielomianu interpolacyjnego w bazie jednomianów $\{1,x,x^2, \ldots\}$ ***jest nie zalecane.***

INTERPOLACJA LAGRANGE'A.

Innym sposobem szukania wielomianu interpolacyjnego *p*. dla zadanego zbioru $\{x_i,y_i\}$, $0 \le i \le n$, jest interpolacja Lagrange'a.W tym miejscu należy wyraźnie zaznaczyć, że istnieje tylko jeden wielomian stopnia n interpolujący zbudowany na punktach $\{x_i,y_i\}$ nie zależnie od sposobu jego konstrukcji.

W interpolacji Lagrange'a w charakterze współczynników a_i we wzorze (2) występują wartości funkcji interpolowanej. Należy jednak wyznaczyć bazę funkcji φ, które teraz będziemy oznaczać jako ℓ_i. A więc wielomian interpolacyjny ma postać:

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\ell_k \tag{6}$$

gdzie $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ldots.\ell_n$ są wielomianami (nazywanymi bazą wielomianów tworzących Lagrange'a), które zależą od węzłów interpolacji $x_0, x_1, \ldots.x_n$ ale nie zależ od wartości funkcji. Wielomiany ℓ_j w oczywisty sposób musza spełniać zależność:

$$\ell_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \textit{jeżeli} \quad i = j \\ 0, & \textit{jeżeli} \quad i \neq j \end{cases} \tag{7}$$

Ze własności (7) wynika, że punkty $x_0,x_1,\ldots,x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots.x_n$ są zerami wielomianu $\ell_j(x)$. Tak więc wielomian ten można przedstawić jako:

$$\ell_j(x) = C_j(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n) \tag{8}$$

Stałą C_i dobieramy tak, aby $\ell_j(x_i)=1$, a więc C_i jest równe:

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \tag{9}$$

Podstawiając wzór na C_i do wzoru (8) otrzymujemy

$$\ell_i = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \tag{10}$$

Używając symbolu " iloczynu składników" wielomiany tworzące Lagrange'a można zapisać następująco:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (0 \le i \le n)$$

Przykład: wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla dwóch par punktów (x_0,y_0) i (x_1,y_1).
Rozwiązanie: Wielomian interpolacyjny Lagrange'a będzie miał postać:

$$p(x)=y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) = y_0\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) + y_1\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

BŁĄD INTERPOLACJI WIELOMIANOWEJ

Niżej będzie podane twierdzenie w jaki sposób możemy oszacować bład popełniany przy zastąpieniu funkcji f(x) wielomianem interpolacyjnym p(x) na przedziale [a,b].

TWIERDZENIE. *Niech f będzie funkcją posiadającą ciągłe pochodne , aż do rzędu n+1 ($f\in C^{n+1}$) i niech p(x) będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia n, takim, że wartości funkcji f pokrywają się z wartościami wielomianu w n+1 punktach $x_0,x_1,\dots\dots.x_n$ na przedziale [a,b]. Dla każdego x z przedziału [a,b], istnieje pewien punkt ξ w przedziale (a,b) taki, że*

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \qquad \textbf{(13)}$$

Analizując wzór (13) widzimy, że błąd wielomianu interpolacyjnego, jest iloczynem dwóch czynników, z których jeden $f^{(n+1)}(\xi)$ zależy od własności funkcji f(x) i na jego wielkość nie możemy wpływać, a wielkość drugiego $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ zależy wyłącznie od wyboru węzłów interpolacji. Powstaje zatem problem najbardziej racjonalnego wyboru węzłów interpolacji x_i , to jest takiego ich wyboru, aby część błędu, na wielkość której możemy wpływać, mianowicie ω_{n+1} miała w przedziale [a,b] najmniejsze co do wartości bezwzględnej maksimum. Inaczej mówiąc, chodzi o znalezienie wielomianu, który w przedziale domkniętym [a,b] "odchyla się najmniej od zera".

Zagadnienie to zostało rozwiązane przez Czebyszewa. Udowodnił on, że w omawianym sensie najlepsze węzły interpolacji obliczone za pomocą wzoru:

$$x_i = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{1}{2}(b - a)\xi_i, \qquad i = 0, 1, 2\dots\dots\dots.n \qquad \textbf{(15)}$$

$$\xi_i = -\cos\frac{2i + 1}{2n + 2}\pi, \qquad i = 0,1,2,\dots\dots\dots,n \qquad \textbf{(16)}$$

$$| \omega_{n+1} | \leq 2\left(\frac{1}{4}(b-a) \right)^{n+1} \qquad \textbf{(17)}$$

są pierwiastkami pewnego wielomianu T_{n+1} (x) zwanego wielomianem Czebyszewa. W tym przypadku

Pierwiastki wielomianu Czebyszewa są różne i leżą w przedziale (-1,1). Wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\, t, \qquad gdzie \qquad t = \arccos x \qquad \textbf{(18)}$$

Zadanie. Powtórzyć przy pomocy Matlaba, obliczenia wielomianu interpolacyjnego z zerami Czebyszewa. Porównać wielkość błędu w stosunku do węzłów interpolacji rozmieszczonych równomiernie.